НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
РУССКОГО ФИЗИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ЖУРНАЛ
РУССКОГО ФИЗИКО–ХИМИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ЖРФХО,

Том 87, Выпуск № 2

Продолжение научного журнала ЖРФХО
РУССКОГО ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА, 1872–1930,
возобновивших свою общественную, научную
и издательскую деятельность в России
16 апреля 1991 г.

Публикует:

- наиболее актуальные, полезные, оригинальные работы соотечественников по всем отраслям естествознания;
- письма читателей и научные статьи, программы и методики, рекламу, технические предложения, анализ, обзор, прогноз;
- энергетика, экология, охрана здоровья, сельское хозяйство, промышленность, техника, технология, экономика, наука.

Не чины и звания, ни возраст и профессия авторов,
а степень общественной пользы и оригинальность их мысли –
единственный критерий отбора работ для публикации

Приоритетная защита всех публикуемых материалов. Предназначен для всех, кому не безразличны современные земные проблемы, кто ищет конкретное поле деятельности для эффективного приложения своих интеллектуальных способностей.

ДЕВИЗ ЖУРНАЛА:

«Новое искание Истин – только это и есть Наука»

Д.И. Менделеев

РАЗОБЛАЧЕНИЕ ЧИСЛА ЭЙЛЕРА (СОВРЕМЕННОЕ ПОНИМАНИЕ «ПРЕДЕЛА» И КАК «ДОКАЗЫВАЮТ» В МАТЕМАТИКЕ)

С.Н. Водянов *(Россия, г. Новосибирск)*

Прежде всего, поставим вопрос: как понимают предел в современном мире математики? Например, «Большая Советская Энциклопедия» даёт такой ответ:

«Предел, ***одно из основных понятий*** *математики. Предел –* ***постоянная, к которой неограниченно приближается некоторая переменная величина, зависящая от другой переменной величины****, при определённом изменении последней»* [1,статья «Предел»].

Рассмотрим доказательство второго замечательного предела в том виде, как оно имеет место в “ходячих” учебниках.

Итак, цитируем [2]. –

«Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство для натуральных значений x.

Докажем вначале для случая последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n; n \in N$

По формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(n-1)\big)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n}\cdot b^n$$

Полагая и $a = 1, b = \frac{1}{n}$, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(n-1)\big)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (1)$$

Из данного равенства (1) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \ldots$ возрастают. Поэтому последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}; n \in N$ – возрастающая, при этом

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \qquad (2)$$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства на единицу, правая часть увеличится, получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменим $3, 4, 5$ ..., стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдём по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2=3$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса (критерий сходимости последовательности) последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $n \in N$ монотонно возрастает и ограничена, значит – имеет предел, обозначаемый буквой e.

То есть $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$»

Конец цитаты [2, статья «Второй замечательный предел»]

Фактически в выражении $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ идёт речь вот о чём: пытаются убедить, что лишь только, когда $x = \infty$, тогда и степень (или логарифм) выражения $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. В противном случае нет этого равенства, а всегда имеет место равенство какому-то y, близкому к e. А поскольку все случаи лишь только «противны», так как по господствующему убеждению даже x никогда не становится $= \infty$, а лишь только бесконечно стремится к ней, постольку это равенство в строго математическом смысле оказывается проблематичным, то есть может быть установлено лишь как приблизительное: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx e$. С точки же зрения представления здесь примешивается ещё и то соображение, что поскольку с большим увеличением величины x кривая линия, которую описывает выражение $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = y$ при «стремлении» x к бесконечности, становится похожей на прямую в своём стремлении в целом к «уровню» «числа» e и неотличимой «на глаз» от действительной прямой, представляющей собой уровень «числа» e, а величина y становится ужасно близкой до незаметности количественного различия величиной к величине e, которую никто никогда в глаза не видел и знает её только умозрительно и приблизительно, постольку здесь полагается, что разностью между кривой линией и прямой можно пренебречь и, таким образом, считается, что степенным выражением $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = y$ «достигается» недостижимый по своей природе «предел», равный «числу» e, или, другими словами, y полагается равным e; и это равенство «с лёгким сердцем» принимается верным. Именно эта мысль записывается в современной математической символике так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

В действительности же «уровень» «числа» e является не прямой, а кривой линией, и этот «уровень» является не уровнем в собственном смысле этого слова, а средней функцией от двух крайних $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ и $\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y$, а «постоянная» e является в действительности не независимой постоянной величиной, а зависимой переменной e. Так что в действительности существует не <u>«трансцендентное» число e</u>, так сказать, «непознаваемое, вещь в себе», «непредсказуемое», а совершенно <u>реальная</u>, но до сих пор бывшая нераскрытой <u>функция</u>. Фактическим её первооткрывателем был искуснейший математик **Эйлер**, правда, открыл он её однобоко и лишь только как «трансцендентное число», так и не увидев её собственными глазами.

В чём состоит решение противоречия современного «понятия» предела, противоречия, которое состоит в том, что произвольно устанавливают определённо-неопределённый (“невыцарапываемый”) предел из молчаливо и аксиоматически принимаемой ложной предпосылки, что $\frac{1}{0} = \infty$?

А вот в чём:

$$e = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y}{2},$$

где выражение

$$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y}{2}$$

является пределом для e при

$$y = x + 1 \text{ и } x = y - 1,$$

а e – функция Эйлера.

Здесь дело обстоит так, что при взаимной связи y с x в отношениях $y = x + 1$ и $x = y - 1$ мы получаем уравнение:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{y}{y-1}$$

Однако степени (логарифмы) обеих сторон уравнения представляют собой противоположность:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=f(x);\qquad \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=f(y),\qquad \text{где } y=x+1 \text{ и } x=y-1$$

В общем виде функцию e, функцию переменных x и y, можно записать так:

$$e=f(x,y)=\frac{f(y)+f(x)}{2}.$$

«Уравнение» $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ не верно, потому что в действительности e всегда больше $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, особенно при том условии, что $x=\infty$. В самом деле, что мы имеем при $x=\infty$? “Ходячие” учебники об этом скромно помалкивают, а вот первоисточник [3, Параграфы 83 и 84; 4, стр. 98-100] «выводит» и рассказывает по этому поводу следующее: $\frac{1}{\infty}=0$. Следовательно, при $x=\infty$ степенное выражение $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ принимает вид $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=(1+0)^{\infty}=1^{\infty}=1$, а не e, тогда как в действительности $\infty=\frac{1}{\left\{1-\left(\frac{(x-1)}{x}\right)\right\}}$ в строго математическом смысле только при $x=\infty$ и когда с выражения $\left\{1-\left(\frac{(x-1)}{x}\right)\right\}$ снимают ограничение, что оно – невычисляемая конечная разность, и, следовательно, далее, всё доказывание «второго замечательного предела», несмотря на всю свою стройность, <u>обращается в ничто</u>. Тем не менее, даже если согласиться с запретом рассматривать x как бесконечное, то есть без конца развёртывающимся процессом, внутренне изменяющейся переменной, и даже, несмотря на то, что в действительности $\frac{1}{\infty}\neq 0$ ни при каких условия, - а $=\left\{1-\left(\frac{(x-1)}{x}\right)\right\}$, да и то только при $x=\infty$, когда с выражения $\left\{1-\left(\frac{(x-1)}{x}\right)\right\}$ снимают то ограничение, что оно – невычисляемая конечная разность, – выражение $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ всегда будет меньше e поскольку здесь речь идёт об асимптотическом отношении между $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ и e, с одной стороны, и $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ и e, с другой. Иначе придётся признать, что асимптотическое отношение – это вымышленное отношение, тогда как в действительности, оно

– твёрдо установленный факт, лежащий в основе всего нашего познания в качестве предпосылки. И лишь $e = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \left(\frac{y}{y-1}\right)^y}{2}$, где e – зависимая переменная, а не «число», и где выражение $\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \left(\frac{y}{y-1}\right)^y}{2}$ является пределом значения зависимой переменной e.

Эта функция e есть средняя исходных двух функций f(y) и f(x), средняя, каждое значение которой определено в данном случае значением взаимозависимых переменных x и y (рис. 1):

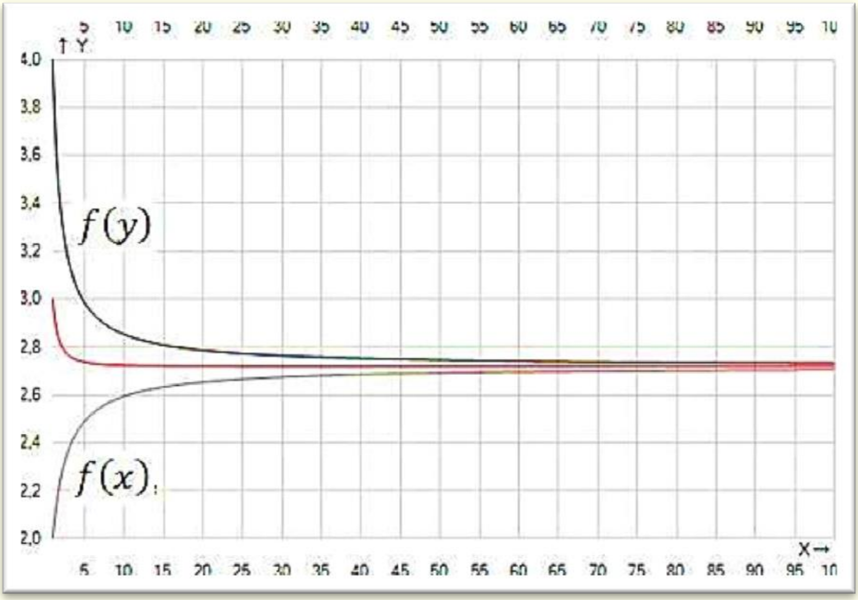

Рис. 1

Однако форма «среднего» может быть преобразована до неузнаваемости, до особенной формы проявления, которая, тем не менее, остаётся эквивалентной своему содержанию.

При ведущей роли переменной x, получаем:

$$e = f\big(x,(x+1)\big) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}}{2} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{2} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\left(\frac{2x+1}{x}\right)}{2} = \frac{\frac{(x+1)^{x}}{x^{x}} \times \frac{(2x+1)}{x}}{2} = \frac{\frac{(x+1)^{x}}{x^{x}} \times \frac{(2x+1)}{x}}{2} =$$

$$= \frac{(2x+1)(x+1)^{x}}{2x^{x+1}}.$$

При ведущей же роли переменной y, имеем “перевёртыш”:

$$e = f\big((y-1),y\big) = \frac{(2(y-1)+1)\big((y-1)+1\big)^{(y-1)}}{2(y-1)^{(y-1)+1}} =$$

$$= \frac{(2y-1)y^{y-1}}{2(y-1)^{y}} = \frac{(2y-1)y^{y}}{2y(y-1)^{y}}.$$

Итак,

$$\text{или } e = f\big(x,(x+1)\big) = \frac{(2x+1)(x+1)^{x}}{2x^{x+1}},$$

$$\text{или } e = f\big((y-1),y\big) = \frac{(2y-1)y^{y}}{2y(y-1)^{y}}.$$

Две крайние функции $f(y)$ и $f(x)$ есть лишь крайние формы проявления функци $e = f(x,y)$; и в адекватном виде она может быть выявлена лишь как средняя функция, как «слепо действующее среднее» функций $f(y)$ и $f(x)$, где $f(y)$ и $f(x)$ – взаимозависимые функции, связанные отношениями $y = x + 1$, и $x = y - 1$.

Таким образом, за ложной формой «числа» e и «предела» учёнейшего фантазирования, а именно, выраженного в форме $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$, таится система уравнений, описывающих отношение зависимости гипербол. –

– При ведущей роли x :

$$e = f(x,y) = \begin{cases} f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}, & f(x) < f(x,y), \\ f(x,y) = f\big(x,(x+1)\big) = \dfrac{(2x+1)(x+1)^{x}}{2x^{x+1}} & \\ f(x+1) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}, & f(x,y) < f(y), \qquad y = x+1 \end{cases}$$

– При ведущей роли y получаем “перевёртыш”:

$$e = f(y,x) = \begin{cases} f(y-1) = \left(1-\dfrac{1}{y}\right)^{y-1}, & f(y-1) < f(x,y), \qquad x = y-1 \\ f(y,x) = f((y-1),y) = \dfrac{(2y-1)y^{y}}{2y(y-1)^{y}} & \\ f(y) = \left(1-\dfrac{1}{y}\right)^{y}, & f(x,y) < f(y), \end{cases}$$

Литература

1. Большая Советская Энциклопедия, http://enc-dic.com/enc_sovet/Predel-50922.html;
2. Википедия, сайт «Академик», http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/924150
3. Леонард Эйлер. «Оснований алгебры Леонарда Эйлера части первой первыя три отделения, переведённыя с французского языка на Российской, со многими присовокуплениями, Василием Висковатовым, Академии Наук Экстраординарным Академиком», Параграфы 83 и 84, 1812 г;
4. Леонард Эйлер. «Дифференциальное исчисление», перевод с латинского, вступительная статья и примечания М.Я. Выгодского. – Москва–Ленинград, 1949. 582 стр.

Водянов Сергей Николаевич, – инженер (Томский государственный университет, 1984–1989гг.), ведущий специалист ОГУП "Техцентр НСО" (г. Новосибирск).